RESUMO

As colisões podem ser de duas maneiras: elásticas e inelásticas. Esta prática teve como objetivo o estudo de colisões elásticas bidimensionais, utilizando-se de conceitos como energia cinética e momento linear, estes relacionados com o experimento por meio de suas leis de conservação. Lançou-se dez vezes uma esfera de ferro de uma rampa, a qual colidiu com outra esfera, também de ferro, parada no fim da rampa. Após a colisão, elas foram lançadas, em queda livre, com um ângulo de 90°. Verificou-se que tal método experimental resultou em erros sistemáticos e aleatórios inexpressíveis pois o ângulo resultante está de acordo com a teoria de colisões.

1. INTRODUÇÃO

No estudo das colisões entre corpos ideais (partículas puntiformes), analisam-se as conservações de duas grandezas: a quantidade de movimento linear e a energia cinética. Porém, para que exista colisão, não necessariamente deve haver contato entre os corpos ou interação entre os mesmos. Um exemplo disso é a colisão entre prótons e elétrons (NUSSENZVEIG, et.*al*. 2002).

Para um sistema formado por duas partículas de massas m_1 e m_2, que se movem com velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente, define-se a quantidade de momento linear como:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \qquad (1)$$

E a energia cinética como:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (2)$$

A lei da conservação da quantidade de movimento linear estabelece que: "Na ausência de forças externas, a quantidade de movimento linear de um sistema de partículas permanece constante" (GOLDEMBERG, 1977).

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \qquad (3)$$

Durante uma colisão (que ocorre em um curto intervalo de tempo), a intensidade da força impulsiva de interação entre as partículas é muito mais intensa que quaisquer forças externas que possam existir. Então, as forças externas serão desprezíveis frente à força impulsiva de interação e a quantidade de movimento linear do sistema de partículas se conserva, ou seja, é a mesma imediatamente antes e logo após a colisão (BEER, et. al. 1991).

Quando a massa das duas partículas que colidem são idênticas, o produto escalar dos momentos lineares finais deve ser identicamente nulo (eles

são perpendiculares entre si), ou seja, a soma dos ângulos em que as partículas saem após a colisão é igual a $\frac{\pi}{2}$ (ESPINOZA, 2013).

Segundo Rampinelli (2002) as colisões são classificadas em elásticas ou inelásticas conforme a conservação ou não da energia cinética do sistema de partículas. Se a energia cinética também foi conservada, esta colisão será dita elástica. Caso contrário, será considerada inelástica.

A energia cinética depende das massas e dos módulos das velocidades das partículas sendo, então, uma grandeza escalar. Portanto, a análise da sua conservação é feita comparando-se os valores obtidos a partir da aplicação direta da equação dois ao sistema de partículas antes e depois da colisão.

Entretanto, como a quantidade de movimento linear é uma grandeza vetorial, a análise de sua conservação deve ser feita com mais cuidado. É necessário, primeiramente, decompor o vetor quantidade de movimento linear (equação um) em relação a um sistema de referência, a fim de obter suas componentes P_x e P_y e, só então, a comparação poderá ser realizada. Dado um sistema de referência, pode-se escrever:

$$P_{x=} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \qquad (4)$$

$$P_{y=} m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \qquad (5)$$

Onde v_{1x}, v_{1y}, v_{2x} e v_{2y} são as componentes dos vetores velocidades das partículas neste sistema de referência. Ilustra-se a transferência do momento:
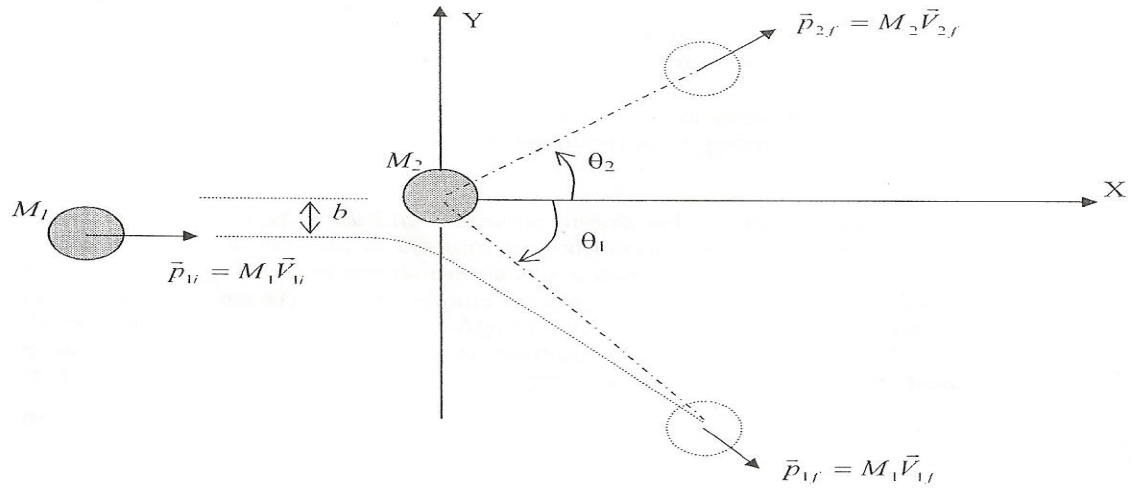
Figura 1. Demonstração do Momento Linear de colisão das partículas.

A força externa que atua no sistema na projeção horizontal do movimento das esferas, é nula tanto antes como após a colisão, desprezando a força de atrito, portanto, podemos considerar que o momento linear horizontal conserva-se durante a colisão.

De acordo com Halliday (1993) quando um corpo cai no vácuo, de forma que a resistência do ar não afete seu movimento, comprovamos um fato notável: todos os corpos, quaisquer que sejam seus tamanhos, formas ou composição caem com a mesma aceleração no mesmo local próximo da superfície da Terra. Esta aceleração, indicada pela letra g, é denominada aceleração de queda livre (ou às vezes aceleração devida à gravidade).

O valor exato da aceleração de queda livre varia com a latitude e com a altitude. Há também variação significativa causada por diferenças na densidade local da crosta terrestre (HALLIDAY, 1993). O módulo desse movimento de queda livre pode ser encontrado partindo das equações a seguir:

$$v = v_0 - gt \tag{6}$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{7}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \tag{8}$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{9}$$

$$y = y_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (10)$$
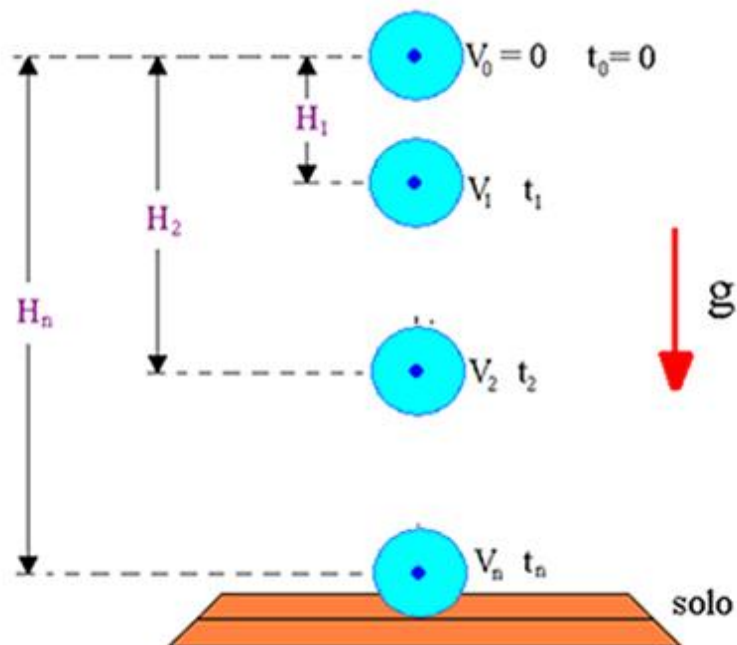
Figura 3. Representação de um corpo em queda livre

Fonte: Mundo Educação

O movimento de projéteis é um movimento com aceleração constante, bidimensional, de uma partícula lançada obliquamente no ar. Este movimento se realiza com a aceleração constante g, dirigida para baixo. Embora possa haver uma componente horizontal da velocidade, não há componente horizontal da aceleração.

$$v_{x0} = v_0 cos\emptyset_0 \qquad (11)$$

$$v_{y0} = v_0 sen\emptyset_0 \qquad (12)$$
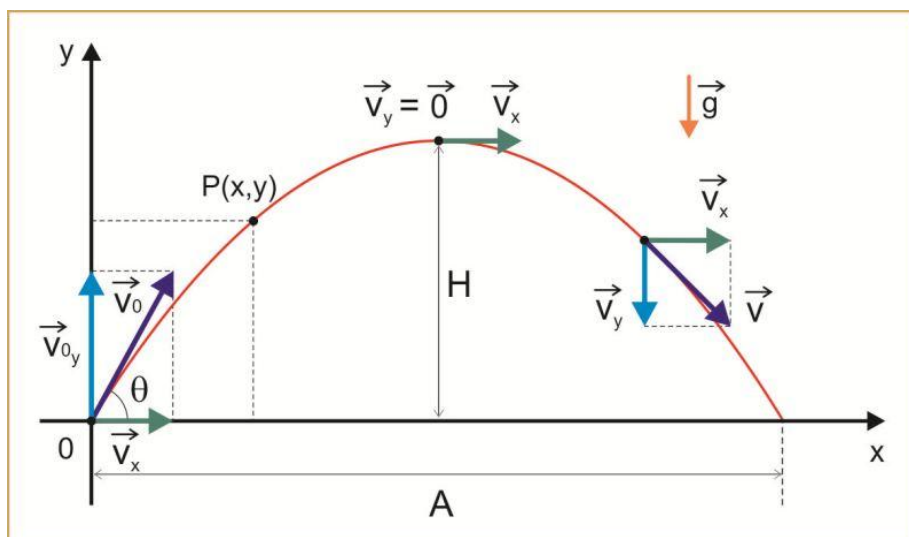
Figura 3. Demonstração do lançamento oblíquo na horizontal, preceito para o movimento balístico, de um corpo.

Fonte: Os Fundamentos da Física

A componente horizontal da velocidade mantém seu valor inicial ao longo de todo o movimento. Já a componente vertical de velocidade é a queda livre. Ela muda com o tempo devido à aceleração constante para baixo, conforme a figura 3 (HALLIDAY, et. al. 2008).

O caso abrangido na prática envolve uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial v0 e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre, dirigida para baixo, e seu movimento é chamado de movimento balístico, demonstrado na figura 4
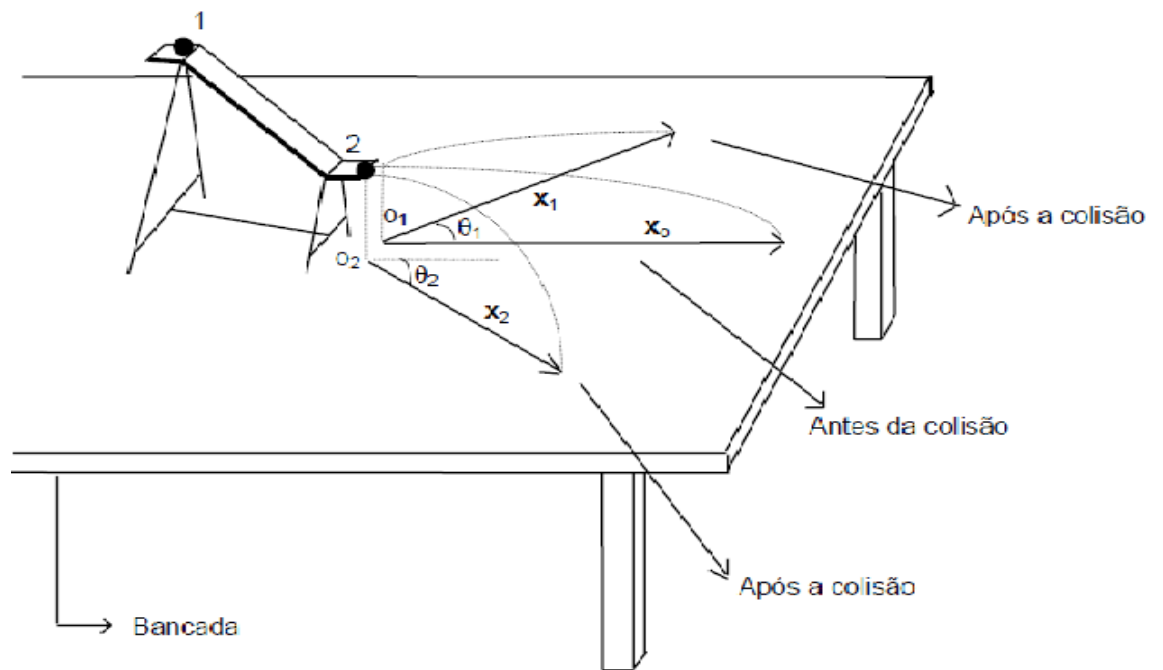
Figura 4. Esquematização do movimento balístico realizado.

Segundo Young (2003) o lançamento Horizontal pode ser considerado, de acordo com o princípio da simultaneidade, como o resultado da composição de dois movimentos simultâneos e independentes: queda livre (movimento vertical, sob ação exclusiva da gravidade, sendo uniformemente variado, pois sua aceleração se mantém constante) e movimento horizontal (movimento uniforme, pois não existe nenhuma aceleração na direção horizontal; o móvel o realiza por inércia, mantendo a velocidade com que foi lançado).

Este relatório descreve a verificação da conservação da energia cinética, da conservação do momento linear e do sistema de dois corpos que colidem elasticamente.

2. OBJETIVO GERAL

Verificar a conservação da energia cinética e do sistema de dois corpos que colidem elasticamente.

2.1 Objetivos específicos

Representar vetorialmente o momento linear de dois corpos e observar as colisões elásticas em duas dimensões.

3. MATERIAIS E MÉTODOS

Realizou-se um experimento de colisão elástica bidimensional, onde foram utilizados o conjunto para Lançamentos Horizontais Moller, composto por um tripé, três sapatas niveladoras amortecedoras, uma rampa de Lançamentos com escala de posicionamento vertical, haste, suporte regulável de apoio da esfera alvo, prumo removível e mufla abraçante, uma chave inversora normalmente aberta, um conjunto fixador e alinhador com bobina e conexão elétrica polarizada, duas esferas metálicas e idênticas, duas folhas de papel carbono e duas folhas de papel milimetrado, fita adesiva, lápis, régua e um transferidor.

A Rampa de Lançamentos Horizontal de Projéteis foi usada para definir as condições iniciais do momento antes da colisão e das velocidades iniciais das duas esferas, onde uma delas estava em repouso ($\overrightarrow{V_{2,\imath n\imath c\imath al}} = 0$). Para simplificação do experimento considerou-se as duas esferas metálicas como idênticas, e então, foram pesadas na balança para encontrar suas massas. A origem de coordenadas foi escolhida baseando-se na esfera em repouso, onde esta foi solta de sua altura inicial até alcançar o papel milimetrado, repetidas vezes.

O plano de colisão foi definido como sendo aquele paralelo à base da rampa de lançamento, que passa pelo nível zero da mesma e pela posição do alvo (com o suporte regulável).

3.1 Medidas Pré-colisão

Mediram-se as alturas h acima do nível zero da rampa, e a altura H da rampa. No lançamento livre da massa M1 (lançamento horizontal de projétil) do topo da rampa, realizado 10 vezes, pode-se medir o seu alcance médio por meio da visualização de um aglomerado de pontos e calcular com isso o tempo de vôo e a velocidade V1i antes da colisão. Mediram-se o desvio longitudinal e transversal relativo ao alcance médio, o momento linear e a energia cinética para a massa M1.

3.2 Medidas Pós-colisão

Ao encontrar a posição correta para o suporte, colocou-se as duas esferas nas suas respectivas posições, a esfera 1 na parte superior da rampa com altura h e a esfera 2 perto da saída da rampa, em certa distância calculada. Realizou-se o experimento soltando a esfera 1 para que ocorresse a colisão elástica, repetiu-se o procedimento 10 vezes, obtendo um aglomerado de pontos tanto para M_1 como para M_2.

Utilizou-se o método da medida dos alcances das duas esferas lançadas, após a colisão, para determinar as velocidades finais das mesmas, pois o movimento de cada esfera, a partir do plano de colisão, é parabólico. Mediram-se o ângulo médio e seus desvios de acordo com as direções dos vetores velocidades após a colisão, as energias cinéticas finais e momentos lineares finais.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na colisão elástica bidimensional tem-se que o momento linear do sistema deve ser conservado, assim como a energia total, que apesar de poder se converter em outras formas, as energias cinéticas antes e após a colisão serão iguais.

Considerou-se o caso particular da colisão entre corpos de mesma massa, onde a massa média encontrada para as duas esferas metálicas foi de 0,01624g. Como uma das esferas parte do repouso (M_2), as direções do movimento que elas fazem após a colisão precisam fazer um ângulo de 90º entre si.

O ângulo encontrado foi de 90º com um erro de ± 3 graus. Este valor está dentro das expectativas, pois devido ao fato de no lançamento da esfera M_1 haver uma variação na altura de referência para soltá-la, ocorre à formação de um aglomerado de pontos que farão parte do erro dessa medida, e também pela possível ocorrência de uma inclinação da rampa no decorrer dos lançamentos.

Para o cálculo da velocidade inicial da esfera M_1 no momento antes da colisão realizou-se o seu lançamento livre pela rampa, repetidas vezes, e mediu-se o alcance médio (0,188m), assim como a altura da rampa H (0,198m). Como o movimento descrito por ela é o mesmo de um lançamento horizontal de projétil, pode-se utilizar as Equações (14) e (15) para encontrar o tempo de vôo e a sua variação, respectivamente. Porém, como a variação do tempo foi muito pequena, esse erro foi desconsiderado em todos os outros cálculos. Por meio da Equação (16) calculou-se a velocidade inicial da esfera M_1 utilizando o alcance medido anteriormente, onde o erro do alcance foi de $\pm 0{,}008$m devido à aglomeração de pontos pelos diversos lançamentos consecutivos. O erro da velocidade inicial $\overrightarrow{V_{1,inicial}}$ foi calculado por meio da Equação (17). Os cálculos para as Equações descritas estão no Apêndice A.

No caso da esfera M_2, como estava em repouso no início, sua velocidade inicial foi igual à zero.

Após as velocidades serem encontradas foi possível calcular o momento inicial, $\overrightarrow{P_{1,inicial}}$, da esfera M_1 (pois para a esfera M_2 o momento inicial

foi igual a zero) e a energia cinética inicial, $K_{1,inicial}$, por meio das Equações (18) e (20), respectivamente. Os erros pertinentes a essas duas medidas foram calculados mediante as Equações (19) e (21), respectivamente. Os cálculos estão descritos no Apêndice A.

Na tabela 1, a seguir, estão descritos os valores encontrados para as velocidades iniciais, momento inicial e energia cinética inicial para as duas esferas com seus respectivos erros.

Tabela 1. Valores calculados de velocidade, momento e energia cinética iniciais.

Esferas	**Velocidade inicial com o erro (m/s)**	**Momento linear inicial com o erro (kg.m/s)**	**Energia cinética inicial com o erro (J)**
M_1	$0{,}94 \pm 0{,}020$	$0{,}015 \pm 5{,}6 \times 10^{-4}$	$7{,}2 \times 10^{-3} \pm 3{,}8 \times 10^{-4}$
M_2	0 m/s	0	0 N*m

Após a colisão pode-se determinar, mediante o valor encontrado, no início, do tempo de vôo, as velocidades finais em x e em y de cada uma das esferas. As componentes em x e em y são utilizadas, pois o alcance medido no papel milimetrado tem componente tanto em x como em y.

As velocidades finais $\overrightarrow{V_{1\,final}}$ e $\overrightarrow{V_{2\,final}}$ foram calculadas por meio do mesmo princípio anterior (lançamento de projétil), utilizando os alcances encontrados em x e em y para cada esfera e o tempo de vôo do início para as duas esferas. Pela utilização da Equação (22) encontraram-se as velocidades em x e em y da esfera M_1, e os erros pertinentes a cada componente foram calculados por meio das Equações (24) e (25). De modo análogo, foram calculadas as velocidades em x e em y para a esfera M_2 pela Equação (23) e os erros para cada componente por meio das Equações (26) e (27). Esses cálculos estão dispostos no Apêndice B.

Os cálculos dos momentos lineares finais, $\overrightarrow{P_{1,final}}$ e $\overrightarrow{P_{2,final}}$, para a esfera M_1 e M_2 foram feitos para cada componente x e y. A Equação (28) foi utilizada para o cálculo do momento linear final da esfera M_1 e os erros para cada componente foram calculados por meio das Equações (29) e (30). Para a esfera M_2 foi utilizada a Equação (31) para encontrar as velocidades finais em x

e y, os erros para cada componente foram calculados por meio das Equações (32) e (33) Todos os cálculos estão presentes no Apêndice B.

Foi determinado o módulo da velocidade final da esfera M_1 e da esfera M_2 por meio da hipotenusa do triângulo formado pelas componentes em x e em y dos alcances das esferas no papel milimetrado (Equações (21) e (22)), onde estas foram utilizadas no cálculo das energias cinéticas finais $K_{1,final}$ e $K_{2,final}$. Estes cálculos foram feitos por meio das Equações (25) e (26) para M_1 e M_2 respectivamente, e os erros pertinentes de cada medida por meio das Equações (27) e (28), respectivamente.

Na Tabela 2, a seguir, estão dispostos os valores calculados das velocidades finais (em x e y), momentos lineares finais (em x e y) e energias cinéticas finais, com seus respectivos erros, para as duas esferas.

Tabela 2. Valores encontrados para velocidade, momento e energia cinética finais, com os erros respectivos, para as esferas metálicas.

Esfera	**Velocidade final em x com o erro (m/s)**	**Velocidade final em y com o erro (m/s)**	**Momento linear final em x com o erro (kg.m/s²)**	**Momento linear final em y (kg.m/s²)**	**Energia cinética final (J)**
M_1	$0,28 \pm 0,030$	$0,45 \pm 0,050$	$0,0045 \pm 5,0.10^{-4}$	$0,0073 \pm 8,4.10^{-4}$	$2,3.10^{-3} \pm 3,2.10^{-4}$
M_2	$0,62 \pm 0,040$	$0,38 \pm 0,050$	$0,010 \pm 7,1.10^{-4}$	$0,0062 \pm 8,4.10^{-4}$	$4,4.10^{-3} \pm 5,5.10^{-4}$

Como deve haver a conservação do momento e da energia, a energia cinética inicial deve se igualar a energia cinética final, onde a inicial é dada somente pela esfera M1 e a final é a soma da energia das duas esferas, ao mesmo tempo em que o momento linear inicial (composto somente pelo da esfera M1) deve ser igual ao momento linear final, da soma dos momentos das duas esferas. Os cálculos para as duas conservações estão no Apêndice C.

Tem-se que, quando a variação do erro total propagado da energia é maior ou igual à variação de energia, esta é conservada. Para o momento

utiliza-se o mesmo fundamento. A partir disso, pode-se dizer que tanto o momento linear quanto a energia cinética foram conservadas, e os cálculos pertinentes a estas conservações estão no Apêndice C.

Obteve-se que, para o momento linear o erro calculado foi de $1,0.10^{-3}$ em x, que foi igual à variação do momento, de $1,0.10^{-3}$, em x. No entanto, para o momento na direção y, o momento resultante foi $1,1.10^{-3}$ e o erro foi $1,2.10^{-3}$, sendo maior que o momento resultante. Para a energia cinética o erro calculado foi de $7,4.10^{-4}$ que é maior que a variação da energia, de $5,0.10^{-4}$.

5. CONCLUSÃO

Por meio da análise dos dados obtidos neste experimento pode-se observar que houve a comprovação do modelo teórico, que afirma que na colisão elástica entre duas esferas de massas idênticas há a dispersão das mesmas, após o choque, em direções que formam um ângulo de 90º entre si, onde no experimento o ângulo encontrado foi de 90º$\pm$3º. Afirma também que, o momento linear e a energia cinética do sistema são conservados. Verificou-se que, apesar de todos os erros provenientes do experimento, a energia cinética e o momento linear foram, de fato, conservados.

APÊNDICE A

Cálculo do tempo de voo, variação do tempo de voo, velocidade inicial e variação da velocidade da esfera 1, momentum linear e energia cinética inicial e propagação dos erros para a esfera 1.

$$t_{voo} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad (14)$$

t_{voo} = tempo de voo (s)

H = altura (m)

g = 9,81 m/s^2 (constante)

$$t_{voo} = \sqrt{\frac{2\,.\,(0{,}198\ m)}{9{,}81\ \frac{m}{s^2}}}$$

$$t_{voo} = 0{,}20\ s$$

Propagação dos erros:

$$\Delta z = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 .\ (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 .\ (\Delta y)^2}$$

$$t_{voo} = \sqrt{\frac{2}{g}}.H^{0,5}$$

$$\frac{dt}{dH} = \sqrt{\frac{2}{g}}.\frac{H^{-0,5}}{2}$$

$$\Delta t = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{g}}\ .\ \frac{H^{-0,5}}{2}\right)^2 .\ (\Delta H)^2}$$

$$\Delta t = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{g}}\right)^2 .\ \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H}}\ .\ \left(\frac{1}{2\sqrt{H}}\right).(\Delta H)^2}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta H}{2H}\right)^2}$$

$$\Delta t = t_{v\hat{o}o} \cdot \frac{\Delta H}{2H} \qquad (15)$$

onde:

Δt = erro para o tempo (s)

t_{voo} = tempo de voo (s)

H = altura (m)

ΔH = erro para a altura (m)

$$\Delta t = 0{,}20\ s \cdot \frac{0{,}001m}{2\ .\ 0{,}198m}$$

$$\Delta t = 5{,}1\ .\ 10^{-4}\ s$$

Cálculo da velocidade da esfera:

$$\vec{V} = \frac{\vec{D}}{t_{voo}} \qquad (16)$$

onde:

$\vec{V}$ = velocidade (m/s)

t_{voo} = tempo de voo (s)

$\vec{D}$ = alcance (m)

Substituindo os valores têm-se:

$$\overrightarrow{V_{1,inicial}} = \frac{\overrightarrow{D_{1,inicial}}}{t}$$

$$\overrightarrow{V_{1,inicial}} = \left(\frac{0{,}188\ m}{0{,}20\ s}\right)\ \hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{V_{1\ ,inicial}} = (0{,}94)\ \hat{\imath}\ m/s$$

Cálculo da variação da velocidade pela propagação de erros:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 . (\Delta D)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 . (\Delta t)^2} \qquad (17)$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{D}{t_{voo}}}{\partial t}\right)^2 . (\Delta D)^2 + \left(\frac{\partial \frac{D}{t_{voo}}}{\partial t}\right)^2 . (\Delta t)^2}$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 . (\Delta D)^2 + \left(\frac{-D}{t^2}\right)^2 . (\Delta t)^2}$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{D}{t}\right)^2 . \left[\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right]}$$

$$\Delta V = \sqrt{V^2 \left[\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2\right]}$$

$$\Delta V = V\sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2}$$

Como o erro do tempo é desconsiderado em comparação ao erro do alcance:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta D}{D}$$

Substituindo os valores relacionados à Velocidade 1:

$$\frac{\Delta V_{1,inicial}}{V_{1,inicial}} = \frac{D_{1\ ,inicial}}{D_{1\ ,inicial}}$$

$$\frac{\Delta V_{1,inicial}}{0{,}94m/s} = \frac{0{,}0040m}{0{,}188m}$$

$$\Delta V_{1,inicial} = 0{,}020\,\frac{m}{s}\,\hat{\imath}$$

Cálculo do momento linear:

$$\vec{P} = m.\vec{V} \qquad (18)$$

Para a esfera 1, tem-se:

$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = m_1.\overrightarrow{V_{1,inicial}} \qquad (19)$$

onde:

$\overrightarrow{P_1}$ = momento linear da esfera 1 (kg/m.s)

m_1 = massa da esfera 1 (kg)

$\overrightarrow{V_{1\ inicial}}$ = velocidade inicial da esfera 1 (m/s)

Substituindo os valores na equação, tem-se:

$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = (0{,}01624\ kg.\,0{,}94)\ m/s\ \ \hat{\imath}$$
$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = 0{,}015\ kg.\frac{m}{s}\ \hat{\imath}$$

Para calcular o erro do Momentum Linear:

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial m}\right)^2.(\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2.(\Delta V)^2} \qquad (20)$$

$$\Delta P = \sqrt{\left(\frac{m.V}{\partial m}\right)^2.(\Delta m)^2 + \left(\frac{m.V}{\partial V}\right)^2.(\Delta V)^2}$$
$$\Delta P = \sqrt{(V)^2.(\Delta m)^2 + (m)^2.(\Delta V)^2}$$

$$\Delta P = \sqrt{(m.V)^2\left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2\right]}$$

$$\Delta P = \sqrt{P^2\left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2\right]}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2}$$

Substituindo os valores para determinar a variação de Momentum Linear inicial:

$$\frac{\Delta P_{1,inicial}}{P_{1,inicial}} = \sqrt{\left(\frac{m}{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{1,inicial}}{V_{1,inicial}}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta P_{1,inicial}}{0{,}015\ kg.m/s} = \sqrt{\left(\frac{5{,}0.10^{-4}kg}{0{,}01624kg}\right)^2 + \left(\frac{0{,}020m/s}{0{,}94m/s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{1,inicial}} = 5{,}6.10^{-4}kg.\frac{m}{s}\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = (0{,}015\ \pm 5{,}6.10^{-4})kg.\frac{m}{s}\ \hat{\imath}$$

Cálculo da Energia Cinética:

$$K = \frac{m.(\vec{V})^2}{2} \qquad (21)$$

Aplicando a Equação à esfera 1:

$$K_{1,inicial} = \frac{m_1.\left(\overrightarrow{V_1}\right)^2}{2}$$

$$K_{1,inicial} = \frac{0{,}01624\ kg.(0{,}94\ m/s)^2}{2}$$

$$K_{1,inicial} = 7{,}2.10^{-4}J$$

Calculando o erro da energia cinética:

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial m}\right)^2 .(\Delta m)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial V}\right)^2 .(\Delta V)^2}$$

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{\frac{m.(\vec{V})^2}{2}}{\partial m}\right)^2 .(\Delta m)^2 + \left(\frac{\frac{m.(\vec{V})^2}{2}}{\partial V}\right)^2 .(\Delta V)^2}$$

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2}\right)^2 .(\Delta m)^2 + (mV)^2.(\Delta V)^2}$$

$$\Delta K = \sqrt{\left(\frac{m.V^2}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V}{V}\right)^2\right]}$$

$$\Delta K = \sqrt{K^2 \left[\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V}{V}\right)^2\right]}$$

$$\frac{\Delta K}{K} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V}{V}\right)^2}$$

Para o cálculo da propagação de erros da Energia Cinética da esfera 1:

$$\frac{\Delta K_{1,inicial}}{K_{1,inicial}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V_{1\ inicial}}{V_{1\ inicial}}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta K_{1,inicial}}{7,2.10^{-3}J} = \sqrt{\left(\frac{5,0.10^{-4}kg}{0,01624kg}\right)^2 + \left(\frac{2.0,02m/s}{0,94m/s}\right)^2}$$

$$\Delta K_{1,inicial} = 3,8.10^{-4}J$$

$$K_{1,inicial} = (7,2.10^{-4} \pm 3,8.10^{-4})J$$

APÊNDICE B

Cálculo das velocidades finais e seus erros, momentum final de cada esfera e a propagação de erros, módulo das velocidades e seus erros e a energia cinética final de cada esfera juntamente com a propagação de erros.
Calculando as velocidades finais:

$$\overrightarrow{V_{1\,final}} = \frac{\overrightarrow{D_{1\,final}}}{t} \qquad (22)$$

$$V_{1\,final} = \frac{D_{1\,final,x}}{t}\hat{\imath} + \frac{D_{1\,final,y}}{t}\hat{\jmath}$$

$$V_{1\,final} = \frac{0{,}055}{0{,}20} m/s\ \hat{\imath} - \frac{0{,}091}{0{,}20} m/s\ \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{V_{1\,final}} = 0{,}28 m/s\ \hat{\imath} - 0{,}45 m/s\ \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{V_{2\,final}} = \frac{\overrightarrow{D_{2\,final}}}{t} \qquad (23)$$

$$V_{2\,final} = \frac{D_{2\,final,x}}{t}\hat{\imath} + \frac{D_{2\,final,y}}{t}\hat{\jmath}$$

$$V_{2\,final} = \frac{0{,}125m}{0{,}20s}\hat{\imath} + \frac{0{,}077m}{0{,}20s}\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{V_{2\,final}} = 0{,}62\ \hat{\imath} + 0{,}38\ \hat{\jmath}$$

Calculando a propagação de erros nas velocidades:

$$\frac{\Delta V_{1\,final,x}}{V_{1\,final,x}} = \frac{D_{1\,final,x}}{D_{1\,final,x}} \qquad (24)$$

$$\frac{\Delta V_{1\,final,x}}{0{,}28\ m/s} = \frac{6\ mm}{55\ mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta V_{1\,final,x}} = 0{,}030\ m/s\ \hat{\imath}$$

$$\frac{\Delta V_{1\,final,y}}{V_{1\,final,y}} = \frac{D_{1\,final,y}}{D_{1\,final,y}} \qquad (25)$$

$$\frac{\Delta V_{1\,final,y}}{0{,}45 m/s} = \frac{10mm}{91mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta V_{1\,final,y}} = 0{,}050 m/s\,\hat{j}$$

$$\frac{\Delta V_{2\,final,x}}{V_{2\,final,x}} = \frac{D_{2\,final,x}}{D_{2\,final,x}} \qquad (26)$$

$$\frac{\Delta V_{2\,final,x}}{0{,}62 m/s} = \frac{8mm}{125mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta V_{2\,final,x}} = 0{,}040 m/s\,\hat{\imath}$$

$$\frac{\Delta V_{2\,final,y}}{V_{2\,final,y}} = \frac{D_{2\,final,y}}{D_{2\,final,y}} \qquad (27)$$

$$\frac{\Delta V_{2\,final,y}}{0{,}38 m/s} = \frac{10mm}{77mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta V_{2\,final,y}} = 0{,}050 m/s\,\hat{j}$$

Cálculo do Momentum Linear Final de cada esfera:

$$\overrightarrow{P_{1,final}} = m.\overrightarrow{V_{1,final}} \qquad (28)$$

$$\overrightarrow{P_{1,final}} = 0{,}01624\,kg.(0{,}28\,\hat{\imath} - 0{,}45\,\hat{j})m/s$$

$$\overrightarrow{P_{1,final}} = (4{,}5.10^{-3}\hat{\imath} - 7{,}3.10^{-3}\hat{j})kg.m/s$$

$$\frac{\Delta P_{1,final,x}}{P_{1,final,x}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{1\,final,x}}{V_{1\,final,x}}\right)^2} \qquad (29)$$

$$\frac{\Delta P_{1,final,x}}{4{,}5.10^{-3}kg.m/s} = \sqrt{\left(\frac{5{,}0.10^{-4}kg}{0{,}01624kg}\right)^2 + \left(\frac{0{,}030m/s}{0{,}28m/s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{1,final,x}} = 5{,}0.10^{-4}kg.m/s\,\hat{\imath}$$

$$\frac{\Delta P_{1,final,y}}{P_{1,final,y}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{1\,final,y}}{V_{1\,final,y}}\right)^2} \qquad (30)$$

$$\frac{\Delta P_{1,final,y}}{7{,}3.10^{-3}kg.m/s} = \sqrt{\left(\frac{5{,}0.10^{-4}kg}{0{,}01624kg}\right)^2 + \left(\frac{0{,}050m/s}{0{,}45m/s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{1,final,y}} = 8{,}4.10^{-4}kg.m/s$$

$$\overrightarrow{P_{1,final}} = [(4{,}5.10^{-3} \pm 5{,}0.10^{-4})\hat{\imath} - (7{,}3.10^{-3} \pm 8{,}4.10^{-4})\hat{j}]kg.m/s$$

$$\overrightarrow{P_{2,final}} = m.\overrightarrow{V_{2,final}} \quad (31)$$

$$\overrightarrow{P_{2,final}} = 0{,}01624\ kg.(0{,}62\ \hat{\imath} + 0{,}38\ \hat{\jmath})m/s$$

$$\overrightarrow{P_{2,final}} = (0{,}010\hat{\imath} + 6{,}2.10^{-3}\hat{\jmath})kg.m/s$$

$$\frac{\Delta P_{2,final,x}}{P_{2,final,x}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{2\ final,x}}{V_{2\ final,x}}\right)^2} \quad (32)$$

$$\frac{\Delta P_{2,final,x}}{0{,}010kg.m/s} = \sqrt{\left(\frac{5{,}0.10^{-4}kg}{0{,}01624kg}\right)^2 + \left(\frac{0{,}040m/s}{0{,}62m/s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{2,final,x}} = 7{,}1.10^{-4}kg.m/s\ \hat{\imath}$$

$$\frac{\Delta P_{2,final,y}}{P_{2,final,y}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_{2\ final,y}}{V_{2\ final,y}}\right)^2} \quad (33)$$

$$\frac{\Delta P_{2,final,y}}{6{,}2.10^{-3}kg.m/s} = \sqrt{\left(\frac{5{,}0.10^{-4}kg}{0{,}01624kg}\right)^2 + \left(\frac{0{,}050m/s}{0{,}38m/s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{2,final,y}} = 8{,}4.10^{-4}\ kg.m/s\ \hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{P_{2,final}} = [(0{,}010 \pm 7{,}1.10^{-4})\hat{\imath} + (6{,}2.10^{-3} \pm 8{,}4.10^{-4})\hat{\jmath}]kg.m/s$$

Cálculo do módulo das velocidades finais das esferas:

$$V_{1,final} = \frac{D_{1,final}}{t} \quad (34)$$

$$V_{1,final} = \frac{0{,}106m}{0{,}20s}$$

$$V_{1,final} = 0{,}53m/s$$

$$V_{2,final} = \frac{D_{2,final}}{t} \quad (35)$$

$$V_{2,final} = \frac{0{,}149m}{0{,}20s}$$

$$V_{2,final} = 0{,}74m/s$$

Cálculo da propagação dos erros das velocidades finais das esferas:

$$\frac{\Delta V_{1,final}}{V_{1,final}} = \frac{\Delta D_{1,final}}{D_{1,final}} \qquad (36)$$

$$\frac{\Delta V_{1,final}}{0,53m/s} = \frac{7mm}{106mm}$$

$$\Delta V_{1,final} = 0,036m/s$$

$$V_{1,final} = (0,74 \pm 0,036)m/s$$

$$\frac{\Delta V_{2,final}}{V_{2,final}} = \frac{\Delta D_{2,final}}{D_{2,final}} \qquad (37)$$

$$\frac{\Delta V_{2,final}}{0,74m/s} = \frac{9mm}{149mm}$$

$$\Delta V_{2,final} = 0,045m/s$$

$$V_{2,final} = (0,74 \pm 0,045)m/s$$

Cálculo da Energia Cinética Final de casa esfera:

$$K_{1,final} = \frac{m.(V_{1,final})^2}{2} \qquad (38)$$

$$K_{1,final} = \frac{0,01624kg.(0,53m/s)^2}{2}$$

$$K_{1,final} = 2,3.10^{-3}J$$

$$K_{2,final} = \frac{m.(V_{2,final})^2}{2} \qquad (39)$$

$$K_{2,final} = \frac{0,01624kg.(0,74m/s)^2}{2}$$

$$K_{2,final} = 4,4.10^{-3}J$$

Cálculo da propagação dos erros da Energia Cinética Final das esferas:

$$\frac{\Delta K_{1,final}}{K_{1,final}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V_{1,final}}{V_{1,final}}\right)^2} \qquad (40)$$

$$\frac{\Delta K_{1,final}}{2,3.10^{-3}J} = \sqrt{\left(\frac{5,0.10^{-4}kg}{0,01624kg}\right)^2 + \left(\frac{2.0,036m/s}{0,53m/s}\right)^2}$$

$$\Delta K_{1,final} = 3,2.10^{-4}J$$

$$K_{1,final} = (2,3.10^{-3} \pm 3,2.10^{-4})J$$

$$\frac{\Delta K_{2,final}}{K_{2,final}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{2.\Delta V_{2,final}}{V_{2,final}}\right)^2} \qquad (41)$$

$$\frac{\Delta K_{2,final}}{4,4.10^{-3}J} = \sqrt{\left(\frac{5,0.10^{-4}kg}{0,01624kg}\right)^2 + \left(\frac{2.0,045m/s}{0,74m/s}\right)^2}$$

$$\Delta K_{2,final} = 5,5.10^{-4}J$$

$$K_{2,final} = (4,4.10^{-3} \pm 5,5.10^{-4})J$$

APÊNDICE C

Cálculo da conservação do momentum linear e da energia cinética com a propagação de erros.

Calculando a conservação do momentum linear:

$$\overrightarrow{P_{inicial}} = \overrightarrow{P_{final}} \qquad (42)$$

$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = \overrightarrow{P_{1,final}} + \overrightarrow{P_{2,final}}$$

Desdobrando na direção x:

$$\overrightarrow{P_{1,inicial}} = \overrightarrow{P_{1,final,x}} + \overrightarrow{P_{2,final,x}}$$

$$(0{,}015 \pm 5{,}6.10^{-4})kg.\frac{m}{s}\,\hat{\imath} = [(4{,}5.10^{-3} \pm 5{,}0.10^{-4}) + (0{,}010 \pm 7{,}1.10^{-4})]kg.\frac{m}{s}\hat{\imath}$$

Calculando o erro da soma do Momentum Final em x:

$$\Delta P_{final,x} = \sqrt{(\Delta P_{1,final,x})^2 + (\Delta P_{2,final,x})^2}$$

$$\Delta P_{final,x} = \sqrt{(5{,}0.10^{-4}kg.\frac{m}{s})^2 + (7{,}1.10^{-4}kg.\frac{m}{s})^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{final,x}} = 8{,}7.10^{-4}kg.\frac{m}{s}\,\hat{\imath}$$

$$(0{,}015 \pm 5{,}6.10^{-4})kg.\frac{m}{s}\,\hat{\imath} = (0{,}014 \pm 8{,}7.10^{-4})kg.\frac{m}{s}\,\hat{\imath}$$

Calculando a propagação do erro da diferença entre o Momentum Inicial e Final:

$$\Delta P_x = \sqrt{(\Delta P_{1,inicial})^2 + (\Delta P_{final,x})^2}$$

$$\Delta P_x = \sqrt{\left(5{,}6.10^{-4}kg.\frac{m}{s}\right)^2 + \left(8{,}7.10^{-4}kg.\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_x} = 1{,}0.10^{-3}\ kg.\frac{m}{s}\ \hat{\imath}$$

Momentum Resultante em x:

$$\overrightarrow{P_x} = (1{,}0.10^{-3} \pm 1{,}0.10^{-3})kg.\frac{m}{s}\ \hat{\imath}$$

Desdobrando em y:

$$\vec{0} = \overrightarrow{P_{1,final,y}} + \overrightarrow{P_{2,final,y}}$$

$$0\hat{\jmath} = [-(7{,}3.10^{-3} \pm 8{,}4.10^{-4}) + (6{,}2.10^{-3} \pm 8{,}4.10^{-4})]kg.\frac{m}{s}\hat{\jmath}$$

Calculando a propagação do erro na soma do Momentum Final em y:

$$\Delta P_{final,y} = \sqrt{(\Delta P_{1,final,y})^2 + (\Delta P_{2,final,y})^2}$$

$$\Delta P_{final,y} = \sqrt{(8{,}4.10^{-4}kg.\frac{m}{s})^2 + (8{,}4.10^{-4}kg.\frac{m}{s})^2}$$

$$\overrightarrow{\Delta P_{final,y}} = 1{,}2.10^{-3}kg.\frac{m}{s}\hat{\jmath}$$

Calculando o Momentum Final em y:

$$\overrightarrow{P_y} = (1{,}1.10^{-3} \pm 1{,}2.10^{-3})kg.\frac{m}{s}\hat{\jmath}$$

Calculando a Conservação da Energia Cinética:

$$K_{inicial} = K_{final}$$

$$K_{1,inicial} = K_{1,final} + K_{2,final}$$

$$(7{,}2.10^{-4} \pm 3{,}8.10^{-4})J = (2{,}3.10^{-3} \pm 3{,}2.10^{-4})J + (4{,}4.10^{-3} \pm 5{,}5.10^{-4})J$$

Calculando a propagação dos erros da soma da Energia Cinética Final:

$$\Delta K_{final} = \sqrt{(\Delta K_{1,final})^2 + (\Delta K_{2,final})^2}$$

$$\Delta K_{final} = \sqrt{(3{,}2.\,10^{-4}J)^2 + (5{,}5.\,10^{-4}J)^2}$$

$$\Delta K_{final} = 6{,}4.\,10^{-4}J$$

$$K_{final} = (6{,}7.\,10^{-4} \pm 6{,}4.\,10^{-4})J$$

$$(7{,}2.\,10^{-4} \pm 3{,}8.\,10^{-4})J = (6{,}7.\,10^{-4} \pm 6{,}4.\,10^{-4})J$$

Calculando a propagação dos erros da diferença da Energia Cinética Inicial e Final:

$$\Delta K = \sqrt{(\Delta K_{inicial})^2 + (\Delta K_{final})^2}$$

$$\Delta K = \sqrt{(3{,}8.\,10^{-4}J)^2 + (6{,}4.\,10^{-4}J)^2}$$

$$\Delta K = 7{,}4.\,10^{-4}J$$

$$K = (5{,}010^{-4} \pm 7{,}4.\,10^{-4})J$$

REFERÊNCIAS

BEER, P.F; JOHNSTON, E.R.. Mêcanica Vetorial para Engenheiros. Vol.2., 5ª Edição, São Paulo, Editora MCGraw-Hill. 1991.

EPINOZA . Colisão elástica bidimensional, 2013.

GOLDEMBERG, J.,Física Geral e Experimental, vol. 1. 3ª edição, Companhia Editora Nacional, 1977.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.. Fundamentos de física 1 mecânica. 4ª edição Rio de Janeiro: Ltc, 1993.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J.. Fundamento de física, volume 1: mecânica. 8ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

QUIÑONES, F. R. E. Apostila de Aula prática: Colisão elástica bidimensional. Centro de engenharias e ciências exatas. UNIOESTE. Paraná, 2011.DA SILVA, D. N. Física Mecânica volume 1. Editora Ática. Paraná.

RAMPINELLI, G.A. Colisões- UFRGS. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20021/Giuliano/elasticainelastica.html. Acesso em: 18 de abril de 2013.

SILVA D.C. M., Funções Horárias do Movimento de Queda Livre. Mundo Educação. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/fisica/funcoes-horarias-movimento-queda-livre.htm. Acesso em: 18 de abril de 2013.

NUSSENZVEIG, M.H. Curso de Física Básica 1- Mêcanica. 4ª edição, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2002.

YOUNG, HUGH D.. Física I: Mecânica . 10ªed. São Paulo: Pearson, 2003